Helena Siwek

Główne strategie kształcenia matematycznego uczniów

> *Co jest nam (w dydaktyce) potrzebne nade wszystko, to śmiałość i świeżość myśli (...) i nieuznawanie za oczywiste tego, do czego po prostu przywykliśmy.*
>
> Jerome S. Bruner

1. Reformy nauczania matematyki - rys historyczny

Matematyka szkolna w ostatnim stuleciu kilkakrotnie zmieniała swoje oblicze. Kolejne reformy nauczania lansowały inne treści, inny język i inne metody wprowadzania ucznia w świat pojęć i operacji matematycznych.

Burzliwe przemiany nastąpiły w latach sześćdziesiątych ubiegłego wieku, kiedy to matematykę mechanistyczną, ukierunkowaną na sprawność rachunkową, rozwiązywanie „słupków", pamięciowe opanowywanie regułek, stosowanie ustalonych schematów do rozwiązywania np. równań, zadań na procenty, proporcje, funkcje, zastąpiono matematyką mnogościową, strukturalistyczną, dedukcyjną.

Jej przedmiotem stały się struktury algebraiczne, metryczne, topologiczne, język operował zaawansowaną symboliką grafów, zbiorów, schematów Venna, tabelek funkcyjnych. Miejsce metod algorytmicznych i pamięciowych zajęła dedukcja i rozumowania ścisłe, z użyciem pojęć i praw logiki.

Dość szybko koncepcja ta doczekała się ostrej krytyki, a matematyka szkolna z powrotem zajęła się liczbami, działaniami, figurami geometrycznymi. Podkreślano przy tym jej naturalne związki z rzeczywistością, szukając często sztucznych sytuacji z „codziennego życia", stanowiących otoczkę dla rozważania treści matematycznych. Zrezygnowano z dedukcji globalnych, ujmujących np. całą geometrię w system uporządkowanych i powiązanych z sobą logicznie aksjomatów, definicji i twierdzeń, zalecając dedukcje lokalne, ukazujące sens wzajemnych zależności między własnościami podstawowymi, definicjami i twierdzeniami w odniesieniu do wybranych fragmentów arytmetyki, geometrii czy algebry. Stosowano wnioskowania empiryczne, intuicyjne, obrazowe jako wstęp do formalizacji na wyższym poziomie.

Współcześnie w teorii preferuje się matematykę realistyczną, związaną z konkretnymi, realnymi, prawdopodobnymi sytuacjami, konstruującą pojęcia abstrakcyjne na podstawie tych sytuacji, rozwiązującą problemy, jakie stwarza otaczająca nas rzeczywistość. Praktyka jest jednak daleka od ideału, co wynika z braku projektów dydaktycznych możliwych do realizacji w szkole, z braku czasu na odkrywanie i tworzenie matematyki przez uczniów, z braku nauczycieli wszechstronnie wykształconych, mogących się podjąć takiego trudnego zadania.

Bujny rozwój dydaktyki matematyki w wieku XX nie tylko przyczynił się do kolejnych zmian treści nauczania, lecz przede wszystkim spowodował wielkie przeobrażenia w koncepcjach nauczania. To w tym wieku rozwijały się i dojrzewały idee nauczania czynnościowego, problemowego, realistycznego. Te trzy główne koncepcje (strategie, metody) są współcześnie zalecane w nauczaniu na każdym poziomie, chociaż znowu rozdźwięk między teorią a praktyką jest bardzo duży. Dobór i zastosowanie w żywym nauczaniu skutecznych strategii kształcenia to konieczny warunek realizacji celów kształcenia i wychowania, formułowanych w każdym programie. Uważa się przy tym, że metody nauczania są nawet ważniejsze od treści. T. Lewowicki (1977) charakteryzuje strategię kształcenia (ściślej - realizację procesu kształcenia) jako „współwystępowanie rozmaitych sposobów organizacji procesu kształcenia oraz metod i środków kształcenia". Proces kształcenia rozumie przy tym za W. Okoniem jako „system powiązanej ze sobą działalności nauczyciela i uczniów, w toku której nauczyciel, kierując pracą uczniów, stwarza im warunki sprzyjające osiąganiu określonych wyników nauczania". Strategie nauczania realistycznego, czynnościowego i problemowego zwracają uwagę na różne sposoby organizacji procesu kształcenia matematycznego oraz dobór odpowiednich metod i środków. Nie stanowią sposobów rozłącznych, a występując równocześnie, wzajemnie się uzupełniają. Strategie te są związane z realizacją projektów dydaktycznych długofalowych, np. stosowanych z nauczaniem zintegrowanym, blokowym czy przedmiotowym. Natomiast w przypadku projektów doraźnych (Gagne 1992), na przykład przygotowywanych na jedną lekcję, stosowanych do pracy podczas lekcji czy zajęć pozalekcyjnych, używa się określenia „metoda nauczania" w innym sensie niż strategia. Do popularnych metod nauczania zalicza się pogadankę, wykład, pracę z podręcznikiem itp.

Reformowanie oświaty - bieżące i perspektywiczne - jest koniecznością spowodowaną postępującymi zmianami cywilizacyjnymi, kulturowymi, ekonomicznymi i społecznymi. S. Palka wymienia sześć składników procesów pedagogicznych kształcenia i wychowania, które mają charakter zmienny (Palka 1999, s. 66). Wymienię z nich trzy pierwsze, w pełnym brzmieniu:

- cele, ich hierarchia, systemy wartości stanowiące ich podstawę i zarazem horyzont dydaktyczno-wychowawczy;
- treści znajdujące swój wyraz w doborze i układzie przedmiotów nauczania w planach kształcenia szkolnego, w doborze i układzie informacji w obrębie nauczanych przedmiotów;
- metody nauczania i wychowania, ich zestroje, urozmaicane przez określone techniki metodyczne; zmianie ulega waga przypisywana ich stosowaniu, np. orientowanie się na styl „podający" lub styl poszukujący (problemowy).

Nie cytuję tutaj form organizacyjnych pracy uczniów, środków dydaktycznych oraz kontroli i oceny rezultatów kształcenia, ponieważ te problemy nie są poruszane w niniejszym opracowaniu.

Zmiana celów nauczania matematyki powodowała, podobnie jak w innych przedmiotach, zmiany treści i zmiany metod (tutaj w znaczeniu strategii, koncepcji) kształcenia.

W nauczaniu matematyki do połowy XX wieku dominowała strategia mechanistyczna, kładąca nacisk na wyuczenie reguł i algorytmów, na ćwiczenie umiejętności rozwiązywania zadań według schematów, nawet bez ich dokładnego rozumienia. W koncepcji tej liczył się wynik, sprawnie osiągnięty rezultat końcowy, rozwiązanie zadania. Praktyka była oporna wobec postępowych idei głoszonych przez teorię, przez uczonych, przez inicjatorów reform oświatowych. Bardzo na przykład postępowe idee utylitaryzmu, psychologizmu i stosowania metody analityczno-syntetycznej, głoszone przez Komisję Edukacji Narodowej i wcielane w życie za pośrednictwem książek szkolnych, opracowanych w ramach Towarzystwa do Ksiąg Elementarnych, powołanego do działalności w roku 1775, długo nie zyskały powszechnej aprobaty (Majorek 1975). Wysoko oceniane przez Komisję podręczniki Szymona L'Huilliera do arytmetyki, algebry i geometrii miały wielu zagorzałych przeciwników - szeroki wachlarz sytuacji uzasadniających wprowadzenie nowego pojęcia, rozmaitość i wszechstronność przykładów, uporządkowanie i logiczne następstwo definicji nie zyskało zrozumienia u nauczycieli. Przyzwyczajeni do realizacji pamięciowej podręcznika strona po stronie, nauczyciele uczyli „po staremu", uczniowie w dalszym ciągu potrafili rozwiązywać tylko zadania typowe, nie radzili sobie z innymi przykładami, nauczyciele dyktowali reguły do zeszytu, woleli krótkie notatki niż rozbudowane teksty nowego podręcznika, dominowało mechaniczne przekazywanie treści (Majorek 1973). Sytuacja ta nasuwała wówczas oczywisty wniosek, że o wiele trudniej o zdolnych wykonawców słusznych założeń metodycznych podręcznika niż o sam podręcznik.

Jak się okazuje, obserwacje z okresu reform KEN są aktualne w odniesieniu do obecnej reformy i współczesnych problemów związanych z urzeczywistnianiem słusznych zasad dydaktycznych w praktyce. Wyniki badań, referowane w ostatnich latach na konferencjach, pokazują że poziom wiedzy i umiejętności uczniów obniża się. Jest to fakt zaskakujący, biorąc pod uwagę, że dysponujemy szeroko rozwiniętymi koncepcjami kształcenia, zorientowanymi teoretycznie i praktycznie, zbudowanymi na mocnych podstawach psychologicznych, pedagogicznych i dydaktykach szczegółowych. Nie brak też różnorodnych programów i podręczników, z których teoretycznie można w praktyce szkolnej wybrać dla danego środowiska najlepszy. Mimo tych sprzyjających warunków, wyniki nauczania w wielu kategoriach są nawet niższe niż te z lat osiemdziesiątych ubiegłego wieku.

2. Realistyczne nauczanie matematyki

Zapewne za prekursora realistycznej strategii kształcenia można uznać J.A. Komeńskiego. Jego nauczanie poglądowe, w którym postulował łączną naukę pisania, czytania i rachunków, miało się opierać na obserwacji przedmiotów i zjawisk otaczającego świata. W swoich podręcznikach lekturę czytanek połączył z przekazywaniem wiedzy z życia codziennego, przyrody, geografii, życia społecznego, kultury, nauki i etyki. W książce *Orbis sensualium pictus* (Świat zmysłowy w obrazach, 1658), tekst słowny jest połączony z odpowiednio dobranymi rycinami. Łatwo zauważyć, że reformatorskie prace wielkiego czeskiego pedagoga stanowią również podwaliny nauczania zintegrowanego. Współczesne kształcenie zintegrowane w klasach I-III zakłada bowiem tworzenie w świadomości ucznia całościowego obrazu świata przy pełnej jego aktywności. Wydaje się, że strategię realistyczną najefektywniej można zastosować właśnie w systemie pełnej integracji w klasach I-III.

Współcześnie rozwój koncepcji realistycznego nauczania matematyki, jego zdefiniowanie, stworzenie podręczników, badania eksperymentalne, zawdzięczamy grupie holenderskich dydaktyków matematyki, stworzonej przez Hansa Freudenthala (Streefland 1991). W koncepcji tej uczniowie powinni budować pojęcia i operacje matematyczne w sposób naturalny, w sytuacjach dla ucznia sensownych, interesujących i pożytecznych. Ważny jest aktywny udział uczniów w odkrywaniu własnych strategii rozwiązywania problemów oraz w stosowaniu wiedzy matematycznej w codziennym życiu. Wychodzi ona od sytuacji rzeczywistych i stawia sobie za cel matematyzację pionową, czyli budowanie pojęć oraz twierdzeń szkolnej matematyki na kolejnych piętrach abstrakcji. Koncepcja ta wytycza drogę od sytuacji realistycznych do formalnej symbolicznej matematyki. Jej główne zasady można sformułować następująco (Kuřina 1992):

1. Świat realny jest tworzywem, z którego da się wyabstrahować pojęcia matematyczne, prawa, operacje i struktury, ale stanowi także dziedzinę, w której matematykę można stosować i weryfikować.

2. Rozwój matematycznych pojęć przebiega od konkretu do abstrakcji. Proces poznania matematycznego to długi proces, podczas którego uczeń rozpoznaje własności przedmiotów i związki między przedmiotami otaczającego świata.

W procesie tym wielką rolę odgrywają doświadczenia z modelami i schematami, prowadzące do ujęcia symbolicznego.

3. Uczeń buduje matematykę w trakcie własnej działalności, jest zdolny samodzielnie obserwować i wyrażać ogólne prawa na podstawie twórczej pracy, a także stopniowo przechodzić od metod nieformalnych do formalnych.

4. Uczenie się to proces socjologiczny, odbywa się w grupie, w której uczniowie dokonują porównań, wymiany myśli, dyskutują nad rozwiązaniami problemów na różnych poziomach matematycznego rozumowania. Uczenie się jest oparte na wzajemnej współpracy i ma charakter interaktywny.

5. Pojęcia, prawa i twierdzenia matematyczne są wynikiem stosowania różnych metod rozwiązywania problemów realistycznych. Uczniowie powinni nauczyć się wszechstronnie wykorzystywać wcześniej uzyskane i uzasadnione wiadomości do odkrywania nowych twierdzeń i własności.

Zasady realistycznego nauczania mają charakter ogólny i w dużej mierze odnoszą się nie tylko do matematyki, lecz także nauczania innych przedmiotów szkolnych oraz do kształcenia zintegrowanego. Idee nauczania realistycznego wpłynęły zdecydowanie na zmianę treści zadań tekstowych i sposoby ich rozwiązywania. Tematy zadań realistycznych powinny bowiem pochodzić z otaczającej dziecko rzeczywistości, dostarczać mu prawdziwych i ciekawych informacji o świecie, pobudzać jego zainteresowania i motywować do twórczej działalności. Dla przykładu porównajmy zadania na temat długości odcinka z podręcznika do matematyki (Jóźwicki 1982, s. 110) dla klasy III i z podręcznika zintegrowanego (Siwek, Siwek-Gardziel 2002, s. 27) również dla klasy III, aby dostrzec różnicę między ujęciem tradycyjnym a realistycznym.

Zadania z podręcznika do matematyki z początku lat osiemdziesiątych, kiedy obowiązywało nauczanie przedmiotowe, wymagają znajdowania odcinków.

Zadanie 1. polega na obliczeniu długości jednego z odcinków, mając daną długość drugiego odcinka i sumę tych dwóch odcinków.

Na rysunku do tego zadania przedstawione są odcinki leżące na jednej prostej: ab = 65 mm oraz ac = ab + bc = 105 mm. Uczeń powinien obliczyć długość odcinka bc, zgodnie z poleceniem.

W zadaniu 2. uczeń ma narysować odcinek ac, wiedząc, że ac = ab + bc oraz znając długości odcinków składowych. Występują tutaj dwa przypadki, gdy długości są małe, mianowicie ab = 4 cm, bc = 7 cm i dość duże, gdy ab = 10 cm i bc = 30 cm.

W zadaniu 3. istotną rolę odgrywa rysunek, przedstawiający chłopca ustawionego przy pionie, z linijką dotykającą czubka jego głowy, oraz odcinek ilustrujący wzrost dziecka podpisany: 120 cm. W zadaniu żąda się, aby uczeń zmierzył swój wzrost i porównał ze wzrostem chłopca. Powinien przy tym określić, o ile centymetrów jest od niego wyższy lub niższy.

Ostatnie na tej stronie zadanie 4. również wymaga posługiwania się rysunkiem, przedstawiającym 5 słupków, między którymi są takie same odległości równe 3m. Pytanie w tym zadaniu brzmi nastepująco: W jaki sposób można obliczyć odległość od pierwszego do ostatniego słupka?

Łatwo zauważyć, że zadania z omawianej strony podręcznika do matematyki są ukierunkowane na formalną wiedzę na temat mierzenia odcinków, rozumienie symbolicznego języka związanego z zapisem odcinków i ich długości, usiłowanie powiązania pojęć matematycznych z wymyślonymi sytuacjami.

Zupełnie inaczej temat ten zrealizowano w podręczniku zintegrowanym (patrz rys. 1.). Tutaj mierzenie odcinków służy porównaniu wysokości ryżu z wysokością krzewu i drzewa herbacianego. W podręczniku zintegrowanym zadania nie dotyczą „suchych" odcinków. Treść jest związana z sytuacją realistyczną, którą można zainteresować dzieci i pobudzić je do rozmowy oraz stawiania pytań. Mierzenie i porównywanie odcinków odbywa się w związku z zadaniami tekstowymi, mającymi pewną narrację, stwarzającymi okazję do mierzenia odcinków w milimetrach, porównywania różnicowego (o ile większy lub mniejszy) i ilorazowego (ile razy większy lub mniejszy). Na następnej stronie znajduje się fragment podręcznika zintegrowanego z zapowiedzianymi sytuacjami i zadaniami.

Dziecko, mierząc i porównując odcinki, dowiaduje się, że ryż jest dużo niższy od człowieka, że krzew herbaciany jest trochę niższy niż Chińczyk, natomiast drzewa herbaciane są bardzo wysokie. Mierząc liście herbaty chińskiej i indyjskiej oraz kłos ryżu, porówna je ilorazowo i stwierdzi, że listek herbaty indyjskiej jest 5 razy dłuższy niż herbaty chińskiej, a kłos ryżu jest 3 razy dłuższy od małego listka herbaty chińskiej. Ćwiczenie 4. wymaga ułożenia przez ucznia zadań realistycznych, które mogą np. dotyczyć porównania różnicowego, ilorazowego, skali pomniejszenia liści i kłosa na rysunku. Stwarza ono okazję do operacji odwrotnych, zawartych w ćwiczeniach 2. i 3. Można je traktować jako zadanie problemowe, otwarte. W naturalny sposób sugeruje ono wykonanie rysunków liści w rzeczywistych wymiarach. Uczeń może przyjmować długości najmniejsze, największe, średnie, mieszczące się w podanych przedziałach. Rozwiązując zadania tekstowe z cytowanej strony, dziecko poszerza swoją wiedzę na temat zbóż hodowanych na świecie, a także upraw krzewów i drzew herbacianych w Azji, produkcji herbaty.

Mierzenie i porównywanie długości. Zesz. ćw. s. 23 i 24

(1) Z różnych rodzajów zbóż uprawia się na świecie najwięcej pszenicy, a na drugim miejscu ryżu. Do największych producentów ryżu należą Chiny, Indie i Indonezja.

Wydajność z 1 ha może wynosić nawet 8 ton. Ile ryżu można uzyskać z pola o powierzchni 19 ha? Porównaj dwa sposoby obliczania iloczynu $8 \cdot 19$. Z jakiego prawa korzystano?

$$8 \cdot (20 - 1) = 8 \cdot 20 - 8 \cdot 1 = 160 - 8 = 152$$

$$8 \cdot (10 + 9) = 8 \cdot 10 + 8 \cdot 9 = 80 + 72 = 152$$

(2) W południowej części Chin, gdzie klimat jest bardzo ciepły i nie ma zimy, uprawia się krzewy herbaciane. Herbata to krzew wiecznie zielony, wysokości od 1 do 5 m. Liście tego krzewu zbiera się co 10-15 dni i suszy na herbatę. W Indiach natomiast rosną drzewa herbaciane, wysokości 8 do 28 m. Drzewa mają o wiele większe liście niż krzewy. Również zbiera się z nich liście co 10-15 dni i suszy.

Zmierz odcinki odpowiadające wysokości ryżu, krzewu herbaty i drzewa herbaty. Ryż na rysunku ma wysokość 1 m. Oblicz, jak wysoki jest krzew i drzewo herbaty.

(3) Zmierz, ile milimetrów mają odcinki odpowiadające długościom: listka herbaty chińskiej, kłosa ryżu, liścia herbaty indyjskiej.
Oblicz, ile razy kłos i liść herbaty indyjskiej jest dłuższy niż listek herbaty chińskiej.

(4) Liście herbaty chińskiej mają od 2 do 11 centymetrów długości, a indyjskiej od 14 do 33 centymetrów. Porównaj ich długości. Ułóż zadania.

Rys. 1. Siwek H., Siwek-Gardziel K. (2002): *Tęczowa Szkoła, Nauczanie zintegrowane 3.4, Mój jedyny podręcznik, klasa trzecia*. Bielsko-Biała, Kleks, s. 27)

Nauczanie zintegrowane stworzyło matematyce wielką szansę zmiany ujęcia abstrakcyjnego na ujęcie realistyczne, bliskie życia. Nie skorzystały z tej szansy licznie powstałe programy nauczania zintegrowanego, które matematykę realizują - mimo integracji - oddzielnie i „po staremu". Autorzy głoszą, że matematyki nie da się zintegrować. Przeczy temu projekt Tęczowej Szkoły, który konsekwentnie w programie i podręcznikach dla klas I-III pokazał - jako pierwszy w Polsce - że jest to możliwe. Matematyka w tym projekcie zyskała ciekawe konteksty dzięki integracji, a tematy zintegrowane zyskały dzięki matematyce, ponieważ zostały ujęte od strony ilościowej, metrycznej, przestrzennej, a nie tylko środowiskowej, literackiej i artystycznej.

3. Czynnościowe nauczanie matematyki

Koncepcja czynnościowego nauczania matematyki jest uzasadniona przez metodologię matematyki oraz psychologiczne teorie kształtowania się pojęć u dziecka. W czynnościowym nauczaniu uwzględnia się operacje występujące w definicjach, twierdzeniach, dowodach, niezbędnych do ich konstrukcji z punktu widzenia metodologii matematyki. Równolegle organizuje się sytuacje problemowe z różnego rodzaju ćwiczeniami, pozwalającymi uczniowi przebyć drogę od czynności konkretnych, poprzez wyobrażone do abstrakcyjnych, zgodnie z teorią interioryzacji i podstawami psychologicznymi procesu kształtowania się pojęć. Apelując o dopasowanie metod dydaktycznych do wiedzy psychologicznej na temat rozwoju dziecka, Piaget pisał:

> „... matematyka obejmuje przede wszystkim działania wykonywane na przedmiotach, operacje zaś są zawsze działaniami ściśle między sobą powiązanymi, tyle że wyobrażanymi, nie zaś wykonywanymi w sensie fizycznym. Niewątpliwie konieczne jest dojście do abstrakcji i jest to nawet całkiem naturalne we wszystkich dziedzinach w przebiegu rozwoju umysłowego młodzieży" (Piaget 1977, 1987).

W metodzie czynnościowej uczeń konstruuje swoją wiedzę w interakcji z materiałami, zadaniami, poprzez bogate doświadczenia, pod kierunkiem nauczyciela i we współpracy z kolegami. O takie nauczanie apelowała Z. Krygowska, twórczyni tej metody, wybitny polski dydaktyk matematyki, w licznych artykułach umieszczanych w czasopiśmie „Matematyka" w latach pięćdziesiątych ubiegłego wieku. Koncepcję czynnościowego nauczania, z punktu widzenia teorii dydaktycznej i praktyki nauczania, szeroko uzasadniła w artykule *Metodologiczne i psychologiczne podstawy czynnościowej metody nauczania* (1957) oraz w monografii *Zarys dydaktyki matematyki* (1977, cz. 1). Rozwinięcie tej teorii można znaleźć w mojej książce *Czynnościowe nauczanie matematyki* (Siwek 1998).

Charakteryzując w jednym z jej rozdziałów materiały stwarzające okazję do organizowania czynności typu matematycznego, będące źródłem pojęć matematycznych, porządkuję je w zależności od rodzaju czynności. A oto przykład. Wyjściowym materiałem do obliczenia przez dziecko sumy 8 + 5 może być 8 jabłek i 5 jabłek (kasztanów, patyczków, palców itp.). Dziecko, łącząc te zbiory, przeliczając elementy, znajduje sumę 8 + 5 = 13. Zadanie wykona na materiale konkretnym. Inaczej będzie, jeśli dziecko - nie wiedząc, ile to jest 8 + 5 - posłuży się rysunkiem ośmiu i pięciu kresek (kropek, kółek itp.) zastępujących jabłka. Mamy wtedy do czynienia z czynnościami wyobrażonymi. Zadanie zostanie wykonane na schematycznym rysunku symulującym rzeczywistość. I wreszcie, uczeń może wykonać zadanie od razu na liczbach i zapisać $8 + 5 = 13$. Mamy wtedy do czynienia z czynnościami abstrakcyjnymi, które dotyczą słów, pojęć, symboli.

Pojęcie „materiałów" jest w matematyce relatywne i zmienia się w zależności od poziomu nauczania, od piętra abstrakcji matematycznej. Im wyższa klasa i im bardziej uczniowie zajmują się pojęciami na wyższym stopniu abstrakcji, tym materiał będzie w wyższym stopniu abstrakcyjny. Jeśli np. będziemy na lekcjach opracowywać wzór na kwadrat dwumianu $(a + b)^2$, to obliczanie iloczynów $(x + 2) \cdot (x + 2)$, $(3m + 1) \cdot (3m + 1)$, $(5 + z) \cdot (5 + z)$ itp. będzie czynnością konkretną. Obliczając te iloczyny, uczeń stwierdzi na konkretnych przykładach, że kwadrat dwumianu jest zawsze trójmianem. Wystąpią tutaj czynności jednokierunkowe i izolowane.

Czynności wyobrażeniowe będą polegać na „widzeniu" związków między kwadratem dwumianu i trójmianem, na wzajemnym przechodzeniu od jednej postaci do drugiej. Uczeń będzie wykorzystywał schemat: $(\square + \mathrm{O})^2 = \square^2 + 2 \cdot \square \cdot \mathrm{O} + \mathrm{O}^2$ dwukierunkowo, od strony lewej do prawej i odwrotnie.

Na podstawie wzoru skróconego mnożenia potrafi od razu obliczyć, że $(3x + 4)^2$ to jest $9x^2 + 24x + 16$, natomiast trójmian $1 + 8y + 16y^2$ jest równy $(1 + 4y)^2$. Operacje przewidywania współczynników trójmianu, postaci jednomianów wchodzących w skład rozważanych wyrażeń, wykonuje uczeń w wyobraźni. Z kolei czynności abstrakcyjne będą dotyczyć dowolnych, nieraz skomplikowanych wyrażeń na podstawie sformułowanego ogólnie wzoru: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. Na poziomie czynności abstrakcyjnych uczeń bez kłopotu zaakceptuje i poradzi sobie z obliczeniem kwadratu dwumianu, w którym np. a i b przyjmą odpowiednio postać $2x^2 + 3$ i $7 + x$. Na tym poziomie mamy do czynienia z aktywnością logiczną, z przekształcaniem wyrażeń zgodnie z przyjętymi prawami, wzorami, regułami.

Rozważania na temat materiałów występujących na różnych poziomach abstrakcji można ująć w postaci zestawienia (Siwek 1998, s. 79).

Materiały stwarzające okazję do organizowania czynności		
konkretnych	wyobrażeniowych	abstrakcyjnych
Przedmioty z otoczenia oraz różnorodne klocki, układanki, wycinanki z papieru, tektury, materialne modele, które da się ciąć, łamać, porównywać, składać. Konstrukcje rysunkowe i schematyczne, pomijające szczegóły, ale również doświadczenia i próby w ramach samej matematyki na liczbach, figurach geometrycznych, wyrażeniach algebraicznych itp.	Przedmioty i materialne modele poddane **transformacjom w wyobraźni**, bez podpory w postaci konkretnych obserwacji, reprezentacje i schematy rysunkowe, strzałkowe, tabelaryczne, zawierające zakodowane informacje o ilości przedmiotów za pomocą punktów, obrazy rzeczywistych przedmiotów, zjawisk i relacji między obiektami. **Planowane** próby i doświadczenia w ramach matematyki na liczbach, figurach i wyrażeniach wraz z przedłużaniem na duże liczby, różnorodne figury i wyrażenia algebraiczne, umożliwiające **przewidywanie** wyników.	Nazwy pojęć, symboliczne kody czynności konkretnych, na przykład drzewka, łańcuszki, grafy strzałkowe, zawierające cyfry, schematyczne rysunki figur geometrycznych, symbole liczb, działań, równości i nierówności liczbowych, a następnie symbole literowe, logiczne, ścisłe definicje pojęć, twierdzenia, prawa, rachunki, algorytmy. Pamięciowe reguły.

Dla uwidocznienia sensu różnych rodzajów operacji rozważmy jeszcze przykład z geometrii.

Jeśli uczeń przecina nożem model prostopadłościanu z ziemniaka wzdłuż przekątnych ścian bocznych równoległych i stwierdza, jaki jest przekrój, to mamy do czynienia z **czynnością konkretną**. W tym przypadku uczeń wykonuje fizyczną czynność na modelu i wizualnie doświadcza, że przekrój jest prostokątem o bokach będących odpowiednio krawędziami prostopadłościanu i przekątnymi krojonej ściany. Oczywiście, czynność ta powinna być skontrastowana innymi przekrojami, które w wyniku dadzą inne prostokąty, ale także trójkąty, czworokąty.

Jeżeli, posługując się twardym modelem prostopadłościanu (plastikowy), pokazuje, jak będą przebiegać linie cięcia i jaka figura będzie przekrojem, to mamy do czynienia z **czynnościami wyobrażonymi**. W tej sytuacji nie stwierdza namacalnie, jaka figura jest przekrojem, ale manipulując modelem, wskazuje jej brzeg, a w wyobraźni „widzi" jej wnętrze. Wykorzystuje w takim przypadku zazwyczaj pamięć konkretnych doświadczeń, zdobytych podczas fizycznego krojenia przedmiotów w kształcie prostopadłościanu.

Jeśli zaś przeprowadzi w myśli (bez udziału modelu) rozumowanie dotyczące wzajemnych relacji między liniami przecięcia i stwierdzi, na podstawie definicji znanych z geometrii, jaka figura jest przekrojem, to mamy do czynienia z **czynnościami abstrakcyjnymi**. Uczeń posługuje się pojęciami matematycznymi, językiem słowno-symbolicznym (prostopadłościan jest opisany np. za pomocą długości krawędzi lub współrzędnych punktów w prostokątnym układzie współrzędnych w przestrzeni), rozumowaniami wykorzystującymi definicje i twierdzenia z geometrii płaskiej i przestrzennej. Szuka odpowiedzi na pytanie, „dlaczego", i uzasadnia ją na podstawie logicznych przesłanek.

Metoda czynnościowa ma charakter uniwersalny i zalecana jest przez wszystkie dydaktyki szczegółowe. Przede wszystkim powinno się ją stosować w kształceniu zintegrowanym - w przedszkolu i klasach początkowych. Na tym poziomie może być mocno związana z sytuacjami realistycznymi, naturalnymi, istniejącymi w rzeczywistym świecie. Tutaj bowiem większość pojęć matematycznych daje się z nich wyabstrahować.

Pożądane jest, aby dziecko w procesie poznania, tworzenia nowych pojęć, przechodziło od czynności konkretnych, przez wyobrażone, do abstrakcyjnych. Zilustrujmy to przykładem związanym z wprowadzaniem ucznia w elementarną wiedzę na temat Układu Słonecznego. Zgodnie z pierwszą zasadą czynnościowego nauczania, należy zanalizować operacje tkwiące w tym pojęciu, które są istotne przy konstrukcji jego modelu. Aby powstał model Układu Słonecznego, trzeba zaplanować czynności zgodnie z istotą tego pojęcia. Najważniejszymi cechami są następujące:

- Słońce znajduje się w centrum Układu Słonecznego,
- planety krążą po orbitach w tę samą stronę, nie przemieszczając się z własnej orbity na inne,
- planety mają kształt kul i są zróżnicowane pod względem wielkości; największy jest Jowisz, najmniejszy Pluton,
- najbliżej Słońca znajduje się Merkury, potem kolejno Wenus, Ziemia, Mars, Jowisz, Saturn, Uran, Neptun, Pluton,
- większość planet ma swoje satelity, w szczególności satelitą Ziemi jest Księżyc.

Zgodnie z drugą zasadą metody czynnościowej (po zanalizowaniu operacji potrzebnych do skonstruowania pojęcia lub jego modelu), należy zaplanować sytuacje problemowe prowadzące od czynności konkretnych, przez wyobrażone, do abstrakcyjnych. W wyniku zinterioryzowania się tych rodzajów czynności dziecko powinno wytworzyć sobie pojęcie Układu Słonecznego - znać jego składowe i funkcjonowanie. Chodzi tu oczywiście o bardzo elementarną, wstępną wiedzę na ten temat.

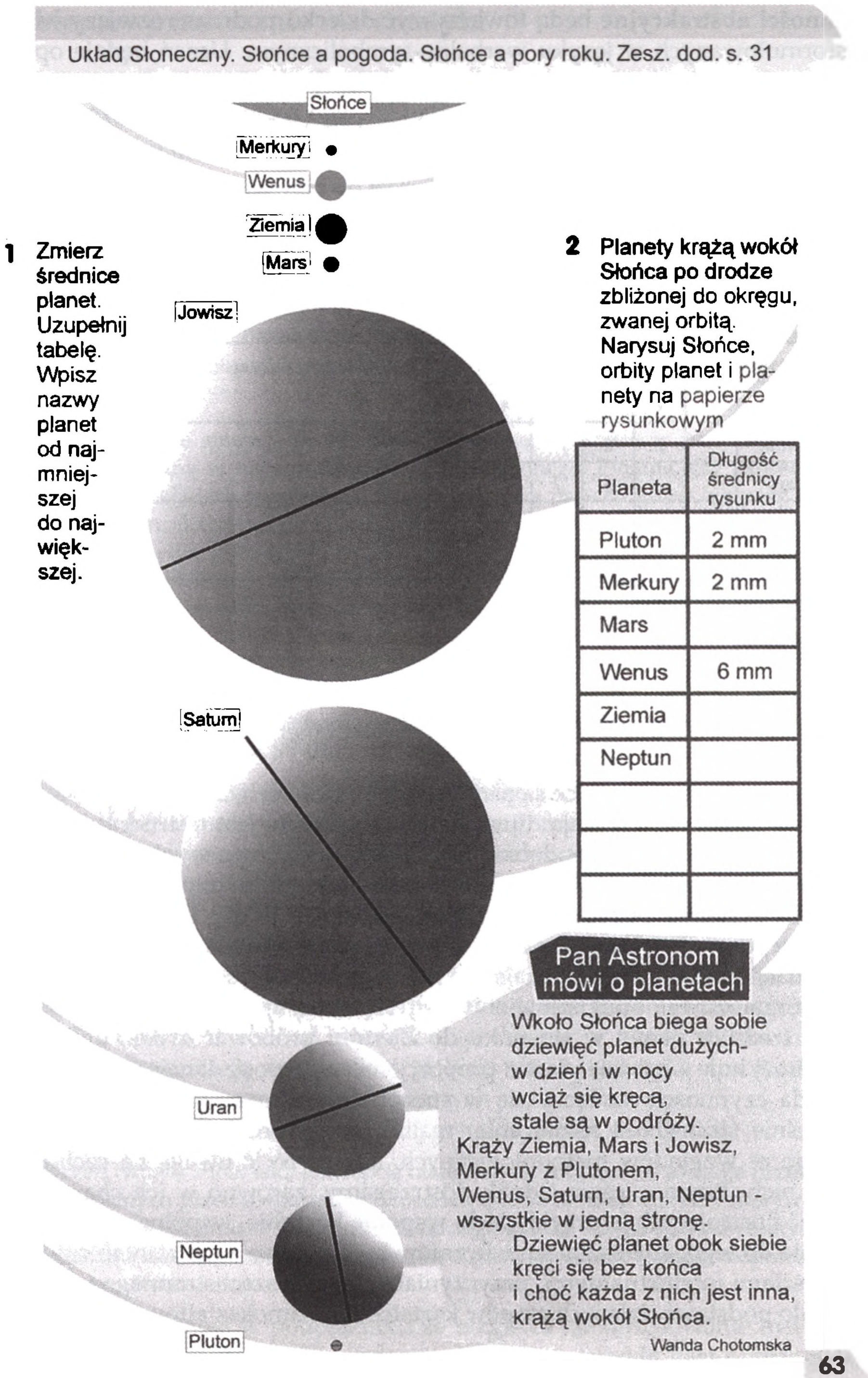
Czynności konkretne mogą zostać zaplanowane, przykładowo, podczas zabawy ruchowej w Układ Słoneczny (pod koniec klasy 0. lub 1.). Materiałem przydatnym do zabawy może być 9 kul o wielkościach proporcjonalnych do wielkości planet. Warto oznaczyć je literami lub grupami liter odpowiadającymi nazwom planet: Me, W, Z, Ma, J, U, S, N, P.

Aby zilustrować ruch planet podczas zabawy, można ją zorganizować na podwórku lub sali gimnastycznej. Na środku sali dzieci powinny ustawić model Słońca i narysować wokół niego 9 współśrodkowych okręgów (orbit). Odległości między orbitami powinny być dość duże, aby umożliwić dzieciom swobodne bieganie po okręgach (orbitach) z modelami planet. Dzieci oznaczają orbity małymi literami pod dyktando nauczyciela w kolejności: me, w, z, ma, j, u, s, n, p. Ułatwi to potem przyporządkowanie planet do orbit. Następnie 9 dzieci wybiera planety zgodnie z symbolami swoich linii (orbit) i, np. śpiewając jakąś piosenkę (tematycznie związaną z poznawanymi wiadomościami), biega naokoło w określonym przez nauczyciela czasie. Na sygnał, czynność wyboru planet i orbit powtarza inna dziewiątka dzieci. Kiedy każde dziecko weźmie udział w zabawie i doświadczy, że planety krążą wokół Słońca w ustalonym porządku, przechodzimy do obserwacji, że mają one różne wielkości. Proponujemy ustawić planety w szeregu od najmniejszej do największej (lub odwrotnie), wypowiedzieć i zapisać ich nazwy (lub ułożyć kartoniki z nazwami w przypadku klasy zerowej). Zwracamy przy tym uwagę na wielką literę w zapisie nazw planet.

Dzieci będą porównywały planety wzrokowo, ale może niektóre zaproponują inne metody. Może zmierzą tasiemką obwody kul w najszerszym miejscu, może obrysują cienie kul i zmierzą za pomocą paska lub linijki ich średnice, może zważą kule i porównają ich masy lub wymyślą jeszcze coś innego. Jest to bez wątpienia sytuacja problemowa, otwarta ze względu na metodę rozwiązania, wymagająca od uczniów pomysłowości. Doświadczenia zdobyte w zabawie z konkretnym modelem będą podstawą zadań prowokujących operacje wyobrażeniowe i następnie abstrakcyjne.

Czynności wyobrażeniowe wystąpią w związku z zadaniami wykorzystującymi statyczne rysunki, ukazujące wzajemne relacje między planetami i Słońcem. Na podstawie cieni planet narysowanych proporcjonalnie, dziecko mierzy ich średnice i stwierdza, które są większe. Można zadanie przedłużyć i porównywać, „o ile" są większe (porównywanie różnicowe) lub „ile razy" są większe (porównywanie ilorazowe). W tym przypadku zadania dotyczą małych liczb, będących długościami średnic narysowanych planet. To również okazja do czynności odwrotnej, dziecko samodzielnie ma zilustrować Słońce, orbity, planety na papierze rysunkowym. Zadania tego typu mogą rozwiązywać uczniowie klasy 2. pod koniec roku szkolnego (lub na początku klasy 3.). Na rys. 2. przedstawiono stronę z podręcznika z tego typu zadaniami (H. Siwek: *Tęczowa Szkoła* 3.1. 2001, s. 63).

Zwróćmy uwagę, że dzięki integracji, rozumienie treści wiersza będzie na pewno o wiele lepsze i głębsze niż w przypadku nauczania przedmiotowego, gdy wiersz ten występował w podręczniku dla klasy 2. do języka polskiego.



Układ Słoneczny. Słońce a pogoda. Słońce a pory roku. Zesz. dod. s. 31

Słońce
Merkury
Wenus
Ziemia
Mars
Jowisz
Saturn
Uran
Neptun
Pluton

1 Zmierz średnice planet. Uzupełnij tabelę. Wpisz nazwy planet od najmniejszej do największej.

2 Planety krążą wokół Słońca po drodze zbliżonej do okręgu, zwanej orbitą. Narysuj Słońce, orbity planet i planety na papierze rysunkowym

Planeta	Długość średnicy rysunku
Pluton	2 mm
Merkury	2 mm
Mars	
Wenus	6 mm
Ziemia	
Neptun	

Pan Astronom mówi o planetach

Wkoło Słońca biega sobie
dziewięć planet dużych-
w dzień i w nocy
wciąż się kręcą,
stale są w podróży.
Krąży Ziemia, Mars i Jowisz,
Merkury z Plutonem,
Wenus, Saturn, Uran, Neptun -
wszystkie w jedną stronę.
Dziewięć planet obok siebie
kręci się bez końca
i choć każda z nich jest inna,
krążą wokół Słońca.

Wanda Chotomska

63

Rys. 2. Siwek H. (2001): *Tęczowa Szkoła* 3.1, s. 63

Czynności abstrakcyjne będą towarzyszyć dziecku podczas rozwiązywania zadań sformułowanych w języku werbalno-symbolicznym. Uczeń będzie operował nazwami planet, liczb, działań i wykonywał działania abstrakcyjne, uzasadnione wiadomościami z matematyki. Oto przykład jednego z zadań abstrakcyjnych z klasy III (H. Siwek, M. Siwek: *Zeszyt ćwiczeń* 3.4, 2002, s. 61).

1 a) Ponumeruj średnice planet od najmniejszej do największej.
b) Zapisz słowami długość wskazanych strzałką średnic.

Nr	Planeta	Długość średnicy w km						Zapis słowny długości średnicy
		ST	DT	JT	S	D	J	
	Merkury			4	8	7	8	← cztery tysiące osiemset siedemdziesiąt osiem
	Wenus		1	2	1	4	0	
	Ziemia		1	2	7	5	6	
	Mars			6	7	8	6	
	Jowisz	1	4	2	8	0	0	←
	Saturn	1	2	0	6	6	0	
	Uran		5	2	4	0	0	←
	Neptun		4	9	5	2	8	
	Pluton			2	3	0	0	←

2. Oblicz różnice między średnicami wybranych planet.

W tym przypadku średnice są zadane za pomocą liczb cztero-, pięcio- i sześciocyfrowych. Liczby te wyrażają długości w kilometrach. Jest to trudne do wyobrażenia sobie przez dziecko, podobnie jak trudno dorosłemu wyobrazić sobie wielkość dziury budżetowej. Ale dzięki wiadomościom o zapisie liczb w dziesiątkowym systemie pozycyjnym, można porównać liczby i uszeregować je od najmniejszej do największej. Dane liczbowe są prawdziwe, więc dziecko znajduje się w sytuacji realistycznej i poznaje dokładniej relacje między wielkościami planet. Można zorganizować upoglądowienie danych, obliczając, ile razy są większe lub mniejsze średnice planet w stosunku do Ziemi, i próbować zrobić (lub przynajmniej opisać) kule - modele planet, proporcjonalne do posiadanego globusa.

Metoda czynnościowa łączy się w sposób naturalny z pozostałymi ważnymi współcześnie strategiami kształcenia: realistyczną i problemową. Omawiamy je oddzielnie ze względów metodologicznych, aby zwrócić uwagę na cechy istotne każdej z nich. Równocześnie jednak dostrzegamy, zarówno w ich charakterystykach, jak i ilustrujących je przykładach, wspólne korzenie, wspólne zasady, wspólne dążenia do tego, aby kształcenie uczniów było zgodne z ich zainteresowaniami, możliwościami intelektualnymi, przyczyniało się do wszechstronnego ich rozwoju i stanowiło podstawę dalszych etapów kształcenia i samokształtowania.

4. Problemowe nauczanie matematyki

Strategia problemowego nauczania obowiązuje we wszystkich przedmiotach i na każdym etapie kształcenia. Jest szeroko opracowana w pedagogice i dydaktykach szczegółowych. Mamy z nią do czynienia wtedy, gdy pojawia się sytuacja problemowa.

W sytuacji problemowej występuje trudność, której nie można rozwiązać w prosty sposób za pomocą znanych schematów, reguł, praw, algorytmów. Często takich sytuacji dostarcza samo życie, ale może je w sposób planowy organizować również nauczyciel lub uczniowie pod jego kierunkiem. Z. Krygowska wyróżnia sytuacje problemowe o charakterze metodologicznym oraz sytuacje pozamatematyczne, prowadzące do problemów matematycznych. Pisze o tym w sposób następujący:

> „Matematyczne sytuacje problemowe pojawiają się często w nauczaniu szkolnym w sposób naturalny w toku postępowania indukcyjnego. Pytanie, czy zaobserwowaną w różnych przykładach regularność można uznać za prawo ogólne lub przy jakich dodatkowych warunkach będzie to zapewnione, wyłonić się może łatwo z takiej sytuacji. I może to być sytuacja zupełnie banalna, a mimo to problemowa. (...) Źródłem matematycznych problemów może być także sytuacja pozamatematyczna wszędzie tam, gdzie uczeń musi zmatematyzować pewne dane i pewne pytanie treści pozamatematycznej, a więc tam, gdzie dla rozwiązania problemu pozamatematycznego stosuje bądź opanowany już przezeń aparat matematyczny lub sam taki aparat musi w tym celu skonstruować. Na tle sytuacji problemowej wyłaniają się już zadania, sformułowane w języku werbalnym lub werbalno-symbolicznym, z symboliką rysunkową włącznie" (Krygowska 1977, cz. III, s. 9 i 10).

Następstwem sytuacji problemowej jest więc formułowanie problemu przez uczniów bądź przez nauczyciela, proponowanie pomysłów rozwiązań, weryfikacja hipotez, podejmowanie prób i sprawdzanie otrzymanych wyników, a na końcu uporządkowanie nowo odkrytej wiedzy oraz zastosowanie jej w praktyce (jeśli to możliwe).

Ponieważ główną aktywnością uczącego się matematyki powinno być rozwiązywanie zadań, rodzi się pytanie, czy w podręcznikach występują zadania problemowe. Szczególnie ważne jest występowanie takich zadań w klasach początkowych. Jeśli bowiem uczeń od początku spotka się z takim stylem nauczania matematyki, zrozumie ją właściwie i głębiej, niż matematykę sprowadzaną do rachunków i schematycznych, bardzo prostych zadań tekstowych.

Nasuwa się tu trafne stwierdzenie Krygowskiej (1977, cz. III, s. 3):

> „Uczeń tworzy sobie taką koncepcję matematyki, jaka mu się ukazuje przez pryzmat rozwiązywanych przez niego zadań. Stosunek ucznia do matematyki i motywacje uczenia się tego przedmiotu w dużej mierze od tego zależą. Czym jest matematyka i czym może być ona dla niego, uczeń poznaje aktywnie właśnie rozwiązując odpowiednio dobrane matematyczne zadania".

Klasyfikując zadania w podręczniku ze względu na zastosowanie metody problemowej, wyróżniamy ich trzy rodzaje: problemy, zwykłe zastosowania teorii, ćwiczenia (Krygowska 1977, cz. III, s. 20–38).

Problemy – to zwykle zadania otwarte, których nie da się natychmiast rozwiązać za pomocą dogodnego wzoru czy schematu poznanego wcześniej w teorii, zawierające trudności o charakterze teoretycznym lub praktycznym, prowokujące do poszukiwań, do aktywności badawczej, do tworzenia nowych konstrukcji, nowej wiedzy, do wypracowania racjonalnej metody itd., która może przybliżyć lub umożliwić ostatecznie rozwiązanie problemu.

Zwykłe zastosowania teorii – wymagają zróżnicowanej aktywności i samodzielności; niejednokrotnie sprowadza się to do matematyzacji sytuacji opisanej w temacie zadania, nasuwającej się w sposób naturalny, bez potrzeby sięgania do szczególnych pomysłów, o ile oczywiście uczeń rozporządza wiadomościami z matematyki, których poprzednio często używał i które umożliwiają mu bezpośrednie rozwiązanie zadania.

Ćwiczenia – to zadania wymagające aktywności odtwórczych, zastosowania znanych schematów, wzorów, wykonania typowych działań, powtarzania rozwiązania analogicznej sytuacji. Ćwiczenia służą przede wszystkim zmechanizowaniu prostych czynności, będących podstawą działalności w bardziej złożonych zadaniach.

Do zadań problemowych z etapu początkowego zaliczymy występujące w tym opracowaniu zadania o krzewach i drzewach herbacianych, o planetach Układu Słonecznego. Zwykłe zastosowania teorii to w nauczaniu początkowym zadania, w których uczeń dostrzega, jakie działania musi wykonać i w jakiej kolejności, żeby rozwiązać zadanie. Ćwiczenia to zwykle zadania rachunkowe – drzewka, grafy, równości, pisemne obliczenia itp.

Analizując wybrane podręczniki pod kątem omówionych wyżej typów zadań, można wnosić o ich problemowości. Dokładne sprawozdanie z analizy czterech podręczników do nauczania zintegrowanego: *Z Ekoludkiem w szkole* – skrót EK, *Wesoła Szkoła* – WS, *Moja Szkoła* – MS i *Tęczowa Szkoła* – TS, obejmujące materiał przypadający na trzy miesiące nauki, przedstawiłam w innym opracowaniu (Siwek 2003). Tutaj przywołam tylko te dane, które rzucają światło na postawione pytanie o zadania problemowe. Odpowiedź jest częściowa, nie dotyczy wyższych klas szkoły podstawowej, gimnazjum i liceum. Ale z fragmentarycznych analiz moich magistrantów wynika, że w wyższych klasach jest podobnie, większość podręczników zawiera stosunkowo mało zadań problemowych.

Dane uzyskane z analizy, odnoszące się do nauczania początkowego, ujmuję w tab. 1.

Tabela 1

Liczbowe zestawienie różnych typów zadań w wybranych podręcznikach

Podręcznik i klasa: / Liczba zadań:	EK, kl. III	WS, kl. II	MS, kl. III	TS, kl. II
łączna	370	294	190	314
problemów	1	22	8	39
zw. zast. teorii	68	75	22	112
ćwiczeń	301	197	160	163

Jak wynika z zestawienia, podręczniki EK i MS są ubogie w zadania problemowe. Procentowo zawierają one odpowiednio 0,3 oraz 4,2%. Analiza jakościowa zadań pokazuje, że podręczniki te nie uwzględniają nowych trendów w nauczaniu matematyki, są nastawione na wprowadzanie i ćwiczenie prostych działań, na sprawność rachunkową i kształcenie umiejętności rozwiązywania schematycznych zadań z treścią.

Lepiej pod tym względem wypadają dwa pozostałe podręczniki. Zawierają one odpowiednio 7,5% zadań problemowych (WS) oraz 12,5% (TS). Zadania problemowe w WS to głównie zadania z kangurkiem, wyróżnione graficznie w podręczniku. W przeciwieństwie do pozostałych, które nie odbiegają od tradycyjnych pod względem treści i konstrukcji, wymagają pewnej pomysłowości przy rozwiązaniu.

Zadania problemowe w TS są często zadaniami złożonymi, geometryczno-arytmetycznymi, wymagającymi mierzenia, porządkowania danych, porównywania i uogólniania. W dużej mierze są to zadania realistyczne, związane z tematami integralnymi, odbiegające pod względem treści i formy od zadań z okresu nauczania przedmiotowego.

Nauczanie problemowe stanowi okazję do zbliżenia procesu nauczania - uczenia się do procesu badania naukowego, do stawiania pytań, formułowania zadań, dostrzegania prawidłowości, a więc do wyzwalania intelektualnie twórczych postaw ucznia. W połączeniu z nauczaniem realistycznym i czynnościowym powinno spełnić ambitne założenia programów nauczania i dobrze służyć rozwojowi ucznia, jego przygotowaniu do rozwiązywania coraz to bardziej skomplikowanych zadań.

Bibliografia (wybrane pozycje)

Cyrański Cz. i in. (2000): *Moja Szkoła, Klasa III, część 6, 7 i 8*. Kielce, MAC.

Gagne R.M., Briggs L.J., Wager W.W. (1992): *Zasady projektowania dydaktycznego*. Warszawa, WSiP, s. 19.

Hanisz J. (2000): *Wesoła Szkoła, Klasa II, część 1*. Warszawa, WSiP.

Jóźwicki T. (1982): *Matematyka w klasie III*. Warszawa, WSiP.

Krygowska Z. (1957): *Metodologiczne i psychologiczne podstawy czynnościowej metody nauczania matematyki* [w:] *Dziesięciolecie WSP w Krakowie*. Kraków, Wyd. Nauk.

Krygowska Z. (1977): *Zarys dydaktyki matematyki, cz. I*. Warszawa, WSiP.

Krygowska Z. (1977): *Zarys dydaktyki matematyki, część III*. Warszawa, WSiP.

Kuřina F. (1992): *Pedagogický realismus a realistickè vyučováni*. Praha, JČMF, s. 47.

Lewowicki T. (1977): *Indywidualizacja kształcenia. Dydaktyka różnicowa*. Warszawa, PWN, s. 217-219.

Majorek C. (1973): *Podręczniki Komisji Edukacji Narodowej w praktyce nauczania szkół średnich (1778-1794)* [w:] *Nowożytna myśl naukowa w szkołach Komisji Edukacji Narodowej*. Stasiewicz-Jasiukowa J. (red.), Wrocław, s. 114-130.

Majorek C. (1975): *Książki szkolne Komisji Edukacji Narodowej*. Warszawa, WSiP.

Palka S. (1999): *Pedagogika w stanie tworzenia*. Kraków, Wydawnictwo Uniwersytetu Jagiellońskiego.

Piaget J. (1977): *Dokąd zmierza edukacja?* Warszawa, PWN.

Siwek H. (1998): *Czynnościowe nauczanie matematyki*. Warszawa, WSiP.

Siwek H. (2000): *Tęczowa Szkoła, Nauczanie zintegrowane 2.1 i 2.2, Mój jedyny podręcznik, klasa druga*. Bielsko-Biała, Kleks.

Siwek H., Siwek M. (2002): *Tęczowa Szkoła, Nauczanie zintegrowane 3.4, Zeszyt ćwiczeń, klasa trzecia*. Bielsko-Biała, Kleks.

Siwek H., Siwek-Gardziel K. (2002): *Tęczowa Szkoła, Nauczanie zintegrowane 3.4, Mój jedyny podręcznik, klasa trzecia*. Bielsko-Biała, Kleks.

Siwek H. (2003): *Matematyczne aktywności we współczesnych podręcznikach zintegrowanych, referat wygłoszony na konferencji organizowanej przez Zakład Dydaktyki UMCS*. Kazimierz Dolny.

Streefland L. (1991): *Realistic mathematics education in primary school*. Utrecht, Freudenthal Institute.

Z Ekoludkiem w szkole, Klasa III, część 1 i 2. Kitlińska-Pięta H. (red.), Warszawa 2001, Wydawnictwo Edukacyjne.